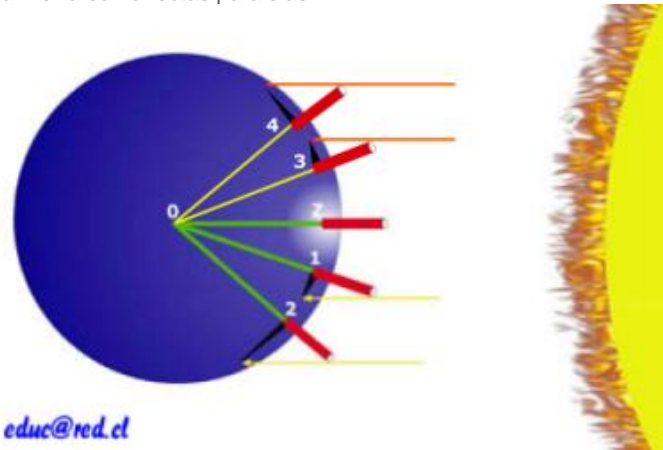




Determinación del Radio de la Tierra.

Consideremos las mediciones de la longitud menor de la sombra de un vástago, que diversos grupos realizaron durante nuestro concurso "Mide tu mundo con educared.cl". Ellos para realizarlas utilizaron un reloj solar especialmente adaptado para hacer estas mediciones.

Esquemáticamente la situación que se produce puede describirse con la figura que sigue, en la que los rayos del Sol (que está muy alejado de la Tierra) inciden sobre la Tierra como rectas paralelas.



Debido a que la Tierra es aproximadamente esférica, los vástagos ubicados en distintos lugares geográficos arrojan sombras de distinta longitud.

¿Qué datos se necesitan?

Con el objeto de determinar el radio de la Tierra se necesita saber, en dos puntos sobre la Tierra, la longitud del vástago, el largo menor de su sombra en cada uno de ellos.

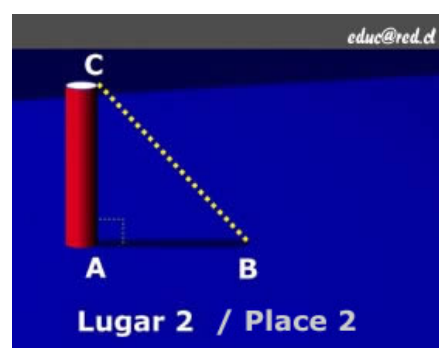
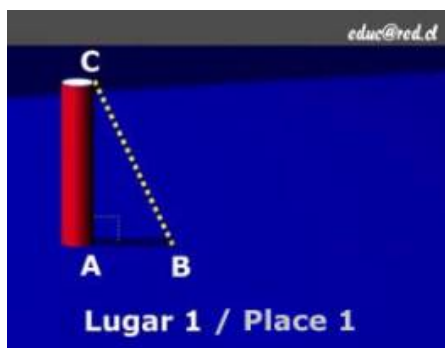
También se requiere conocer la distancia entre los dos puntos geográficos (que es la distancia entre ambos lugares "proyectada" sobre el plano cenital)

Para ayudarte en el cálculo usa los siguientes datos recogidos por nuestros participantes:

¿Cómo se usan estos datos?

La longitud de los vástagos y de sus sombras más cortas sirven para determinar el ángulo que los rayos solares forman con la vertical en cada punto.

Para realizar esta determinación existen distintos métodos, uno que puede ser utilizado por Estudiantes de Educación Básica y Media y otro que requiere conocimientos de Trigonometría y que podría ser utilizado por aquellos estudiantes de Educación Media que conozcan las definiciones relevantes para realizar el cálculo. Vamos a describir ambos métodos. Consideremos un diagrama simplificado del vástago y su sombra, en dos lugares diferentes, como los que aparecen a continuación:



El trazo rojo vertical **AC** representa el vástago, mientras que el trazo negro horizontal **AB** representa su sombra más corta, en cada uno de los lugares. Es preciso enfatizar que el ángulo que forma la recta **AC** con la recta **AB** es un ángulo recto. Nos interesa determinar el ángulo que forman los rayos solares (trazo amarillo **CB**) con la vertical, es decir, queremos determinar el ángulo ACB.



Método 1

Se construye, usando papel milimetrado por ejemplo, un ángulo recto cuyo vértice llamamos **A**, de modo que uno de sus lados sea vertical y el otro horizontal. En el lado vertical se mide una distancia igual al alto del vástago para determinar el punto **C**, que llamaremos la **punta del vástago**, para cada uno de los dos lugares.

Sobre la línea horizontal se mide la longitud de su sombra más corta para determinar el punto **B**. Para terminar la construcción del triángulo se une el punto **C** con el punto **B**.

Ahora, se puede medir el ángulo **ACB** con un transportador, medido en grados, por ejemplo.

NOTA IMPORTANTE: Si el vástago es demasiado largo para que el triángulo quepa en un papel milimetrado, se puede reducir el dibujo a escala, teniendo precaución de utilizar la misma escala para la longitud del vástago y la longitud de su sombra más corta.

Para la determinación del Radio de la Tierra realmente se requiere la diferencia (la resta) de los valores de dos de estos ángulos en dos lugares distintos de la Tierra. En este caso se repite la operación ya descrita con los datos del otro punto geográfico.

La determinación de la diferencia de los ángulos es más precisa si una vez dibujados los dos triángulos (correspondientes a las mediciones en dos lugares distintos), se recortan cuidadosamente los triángulos y se superponen haciendo coincidir tanto los vástagos como sus puntas y, a continuación, se mide la diferencia entre sus ángulos ACB correspondientes, directamente con un transportador, medido en grados. (La diferencia entre estos dos ángulos es lo que llamaremos ángulo 1O2).

Método 2

(requiere conocimientos de Trigonometría)

Se procede de manera similar a la ya esbozada en el **Método 1**, aunque no es necesario utilizar papel milimetrado para la determinación del valor del ángulo **ACB**. El valor del ángulo **ACB** se obtiene usando el concepto de tangente de un ángulo. Para acortar la notación se define

$$\text{ángulo } ACB = \varphi$$

y se tiene

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{Longitud de la Sombra más Corta}}{\text{Longitud del Vástago}}$$

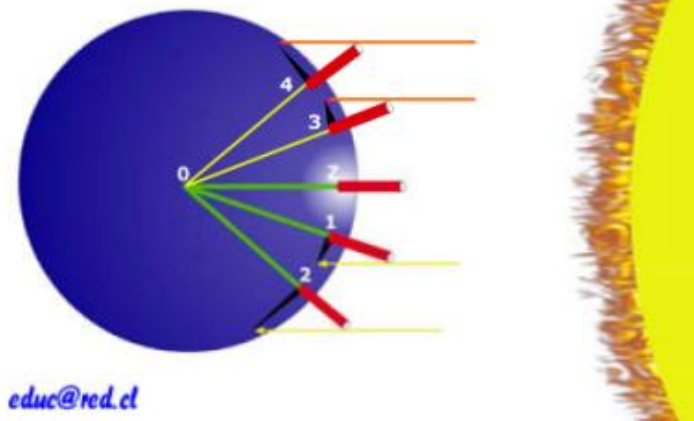
o, utilizando la función inversa,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{AB}{AC} = \operatorname{arctg} \frac{\text{Longitud de la Sombra más Corta}}{\text{Longitud del Vástago}}$$

lo que permite determinar los ángulos **ACB** (medidos en grados) en cada uno de los lugares y, en consecuencia, la diferencia entre ellos. Las funciones trigonométricas y sus inversas pueden obtenerse utilizando una calculadora científica.

DETERMINACIÓN DEL RADIO DE LA TIERRA

El ángulo que los rayos del Sol forman con el vástago en el lugar **1** es igual al ángulo **ZO1** (porque son ángulos internos alternos entre paralelas, donde las rectas paralelas son los rayos del Sol) como se ve en la figura siguiente.



De la misma manera, el ángulo que los rayos del Sol forman con el vástago en el lugar 2 es igual al ángulo **ZO2** (porque también son ángulos internos alternos entre paralelas).
 Ahora que se conocen los ángulos en el lugar 1 y el lugar 2 hay que tomar la diferencia de esos dos ángulos (hay que tomar un ángulo y restarle el otro ángulo) **en todos los casos excepto si una de las mediciones se hizo en Chile y la otra medición se hizo en Estados Unidos o en México en cuyo caso hay que sumarlos** (hay que tomar un ángulo y sumarle el otro ángulo). Ver la Tabla

Lugar 1	Lugar 2	Operación con los dos ángulos
Estados Unidos	Estados Unidos	Restar (-)
Estados Unidos	México	Restar (-)
Estados Unidos	Chile	Sumar (+)
México	México	Restar (-)
México	Chile	Sumar (+)
Chile	Chile	Restar (-)

Para determinar la distancia D12 (que es la distancia entre ambos lugares "proyectada" sobre el plano cenital)
 Inserta los valores de las latitudes y de las longitudes de los Puntos 1 y 2 donde se realizaron las mediciones y la fecha y el tiempo local en el que estos resultados se obtuvieron (sólo puedes utilizar una medición hecha en cada lugar)
 Entonces, determinando el ángulo **1O2**, y conociendo la distancia **D12** entre los puntos 1 y 2 ("proyectada" sobre el plano cenital que, sólo en los solsticios coincide con los meridianos), se puede establecer la siguiente proporción:

La distancia **D12** es a la circunferencia terrestre completa como el ángulo **1O2** es al ángulo completo (360°). Es decir,

$$\text{Circunferencia terrestre completa} = D12 \cdot \frac{360^\circ}{\text{ángulo } 1O2}$$

Sabiendo que

$$\text{Circunferencia terrestre completa} = 2\pi \cdot \text{Radio de la Tierra}$$

se tiene que

$$\text{Radio de la Tierra} = \frac{D12}{2\pi} \cdot \frac{360^\circ}{\text{ángulo } 1O2}$$

para sus cálculos pueden usar

$$\pi = 3,14$$