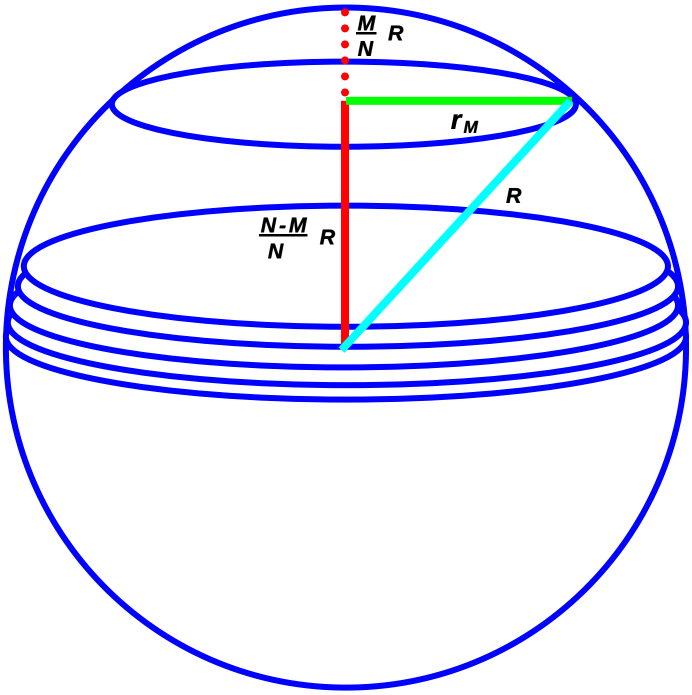
CÁLCULO DE VOLUMEN DE ESFERAS

Para realizar el cálculo del volumen de una esfera de radio ***R***, utilizaremos el Principio de Cavalieri.

Para eso, dividimos a la mitad superior de la esfera en los llamados ***indivisibles de volumen***, usando planos paralelos horizontales equidistantes (a distancias iguales entre ellos).

El primer ***indivisible de volumen*** para ***M = 1***, está a una distancia ***h*** (***= R/N***) del "Polo Norte", el segundo está a una distancia ***2 h*** del "Polo Norte", el tercero está a una distancia ***3 h*** del "Polo Norte", y así sucesivamente, de modo que el ***indivisible de volumen*** número ***M*** está a una distancia ***(M/N) R*** del "Polo Norte" y a una distancia (***(N-M)/N) R*** del centro de la esfera como se muestra en la figura



El Principio de Cavalieri consiste en aproximar el cálculo del volumen total del cuerpo como la suma de los ***indivisibles de volumen***, calculando cada uno de ellos como el producto de su área por la altura ***h*** (***= R/N***) correspondiente.

Para calcular el área de los ***indivisibles de Volumen*** basta con usar el hecho que todas las bases son circunferencias semejantes y calcular el radio r_M de ellas

El radio r_M de la circunferencia en el ***indivisible de Volumen*** número ***M*** se puede calcular usando el triángulo de la figura anterior y el Teorema de Pitágoras, de la siguiente manera

$$r_M{}^2 = R^2 - \frac{(N-M)^2}{N^2}R^2$$

Al desarrollar el cuadrado del binomio, se obtiene,

$$r_M{}^2 = \frac{N^2 - (N-M)^2}{N^2} R^2 = \frac{N^2 - (N^2 - 2NM + M^2)}{N^2} R^2$$

lo que finalmente arroja como resultado para ***(r$_M$)^2***

$$r_M{}^2 = \frac{(2NM - M^2)}{N^2} R^2$$

Entonces para los sucesivos indivisibles se tiene

$$v_{indivisible\ M} = \pi\, r_M{}^2 h = \pi\, r_M{}^2\ \frac{R}{N}$$

$$v_{indivisible\ M} = \pi\ \frac{(2NM - M^2)}{N^2} R^2\ \frac{R}{N} = \pi\ \frac{(2NM - M^2)}{N^3} R^3$$

M	***$r_M{}^2$***	***b_M***	***h***	***$v_M = b_M\ h$***
1	R^2 (2N-1)/N^2	π R^2 (2N-1)/N^2	R/N	π R^3 (2N-1)/N^2
2	R^2 (4N-4)/N^2	π R^2 (4N-4)/N^2	R/N	π R^3 (4N-4)/N^3
3	R^2 (6N-9)/N^2	π R^2 (6N-9)/N^2	R/N	π R^2 (6N-9)/N^3
4	R^2 (8N-16)/N^2	π R^2 (8N-16)/N^2	R/N	π R^2 (8N-16)/N^3
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
M	R^2 (2NM-M^2)/N^2	π R^2 (2NM-M^2)/N^2	R/N	π R^3 (2NM-M^2)/N^3
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
N	R^2	π R^2	R/N	π R^3/N

Entonces el volumen de la esfera ***V$_{esfera}$*** es (el doble de) la suma de los volúmenes de los ***indivisibles de volumen v$_M$*** (ya que consideramos sólo la mitad de la esfera), donde usamos la notación de suma que se simboliza con la letra griega **Σ** (sigma mayúscula)

$$V_{esfera} = 2\sum_{M=0}^{M=N} v_{indivisible\ M} = 2\sum_{M=0}^{M=N} \pi\left(\frac{2M}{N^2} - \frac{M^2}{N^3}\right)R^3$$

Para este cálculo se requiere conocer los resultados de las sumas

$$\sum_{i=0}^{i=N} i = 0+1+2+3+4+.....+N$$

$$\sum_{j=0}^{j=N} j^2 = 0+1+4+9+16+.....+N^2$$

La suma de los primeros ***N*** enteros es conocida y el resultado de la sumatoria está dado por

$$\sum_{i=0}^{i=N} i = 0+1+2+3+4+.....+N = \frac{1}{2}N(N+1)$$

La suma de los cuadrados de los primeros ***N*** enteros es conocida y el resultado de la sumatoria está dado por

$$\sum_{i=0}^{j=N} j^2 = 0+1+4+9+16+.....+N^2 = \frac{1}{3}N(N+\frac{1}{2})(N+1)$$

como comprobamos en la Tablas siguientes

N	**Σ**	Suma			(1/2)N(N+1)
0	0	0			(1/2)0(0+1)=0
1	0+1	1			(1/2)1(1+1)=1
2	0+1+2	3			(1/2)2(2+1)=3
3	0+1+2+3	6			(1/2)3(3+1)=6
4	0+1+2+3+4	10			(1/2)4(4+1)=10
5	0+1+2+3+4+5	15			(1/2)5(5+1)=15
.	.	.			.
.	.	.			.
.	.	.			.

N	Σ	Suma			(1/3)N(N+1/2)(N+1)
0	0	0			(1/3)0(0+1/2)(0+1)=0
1	0+1	1			(1/3)1(1+1/2)(1+1)=1
2	0+1+4	5			(1/3)2(2+1/2)(2+1)=5
3	0+1+4+9	14			(1/3)3(3+1/2)(3+1)=14
4	0+1+4+9+16	30			(1/3)4(4+1/2)(4+1)=30
5	0+1+4+9+16+25	55			(1/3)5(5+1/2)(5+1)=55
.	.	.			.
.	.	.			.
.	.	.			.

Así, el volumen de la esfera es

$$V_{esfera} = 2\pi\left(\frac{N(N+1)}{N^2} - \frac{N(N+\frac{1}{2})(N+1)}{3N^3}\right)R^3$$

Al desarrollar los productos queda

$$V_{esfera} = 2\pi\left(\frac{N^2}{N^2} + \frac{1}{N} - \left[\frac{N^3}{3N^3} + \frac{\frac{3}{2}N^2}{3N^3} + \frac{\frac{1}{2}N}{3N^3}\right]\right)R^3$$

Como es claro, la aproximación del volumen total de la pirámide es mejor cuanto mayor es ***N***.

Se toma ***N*** como un número muy grande de modo que ***(1/N)*** y ***(1/N²)*** sean muy pequeños. En ese caso, sólo el primer y el tercer términos son importantes y obtenemos

$$V_{esfera} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right)R^3 = 2\pi\frac{2}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$

En resumen, el volumen de la esfera de radio ***R*** es

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$